

LAPLACEOVA MATICE VYBRANÝCH TŘÍD GRAFŮ

Laplacian matrix of selected graph classes

Zadání bakalářské práce

Student: **Petra Hoffmannová**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: Laplaceova matice vybraných tříd grafů
Laplacian matrix of selected graph classes

Zásady pro vypracování:

Smyslem práce je přehledně zpracovat přehled známých výsledků týkající se vybraných vlastních vektorů a vlastních čísel Laplaceovy matice některých tříd grafů. Laplaceova matice má pěkné aplikace v numerické matematice. Ne vždy je však využití přímočaré a rozbořem dostatečného množství vhodně zvolených příkladů můžeme získat dobré vodítko pro praktické úlohy.

Práci lze rozdělit do následujících částí:

- vyhledání známých teoretických výsledků pro zvolené třídy grafů
- zpracování konkrétních výpočtů pro vhodně zvolené malé příklady grafů
- formulace hypotéz na základě numerických výsledků
- ověření pro větší grafy

Přínosem jsou jak pozitivní, tak negativní výsledky ověřovaných hypotéz.

Seznam doporučené odborné literatury:

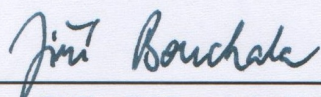
- Davis: Direct Method for sparse linear systems, SIAM, Philadelphia, USA (2006), ISBN-13 978-0-898716-13-9
- odborné články a texty podle pokynů vedoucího

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

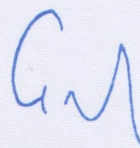
Vedoucí bakalářské práce: **doc. Mgr. Petr Kovář, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2013

Datum odevzdání: 07.05.2014



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 7. května 2014


.....

Ráda bych poděkovala především panu doc. Mgr. Petru Kovářovi, Ph.D. za jeho ochotu a trpělivost při konzultacích. Dále bych ráda poděkovala rodině a přátelům za podporu během studií.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se soustředí na vztah mezi grafy a jejich maticemi sousednosti, respektive grafy a jejich Laplaceovými maticemi. Na tuto práci můžeme nahlížet jako na souhrn již známých poznatků o vlastních číslech. Budeme zkoumat, jak se změní vlastní čísla, když provedeme určité operace v grafu. Mezi zkoumanými operacemi jsou například odebrání hrany a odebrání vrcholu. Také se zajímáme o vztah mezi vlastními čísly grafu a jeho line grafu či jeho doplňku.

Klíčová slova: matice sousednosti, Laplaceova matice, vlastní čísla grafu

Abstract

This bachelor thesis focuses mainly on the relationship between graphs and their adjacency matrices, between graphs and their Laplacian matrices respectively. This work can be viewed as the sum of previously obtained results about eigenvalues. We will explore how to change eigenvalues when certain operations are performed on the graph. Among these operations are for example removal of edge and removal of vertex. We also investigate the relationship between eigenvalues of a graph and its complement or its linegraph.

Keywords: adjacency matrix, Laplacian matrix, eigenvalues of graphs

Seznam použitých zkratek a symbolů

| | |
|----------------|--|
| $G = (V, E)$ | – graf G s množinou vrcholů V a množinou hran E |
| $\deg(v)$ | – stupeň vrcholu v grafu G |
| n | – počet vrcholů grafu G |
| K_n | – kompletní (úplný) graf na $n \geq 1$ vrcholech |
| $K_{m,n}$ | – kompletní bipartitní graf na $m + n$ vrcholech s partitami velikosti m a n |
| P_n | – cesta na $n \geq 1$ vrcholech |
| C_n | – cyklus na $n \geq 1$ vrcholech |
| S_n | – hvězda na $n \geq 1$ vrcholech |
| A_G | – matice sousednosti grafu G |
| D_G | – diagonální matice grafu G |
| L_G | – Laplaceova matice grafu G |
| I | – jednotková matice |
| J | – matice, která obsahuje samé jedničky |
| Q_n | – hyperkrychle řádu n grafu G |
| $G-v$ | – odebrání vrcholu v grafu G |
| $G-e$ | – odebrání hrany e grafu G |
| G^l | – line graf grafu G |
| \overline{G} | – doplněk grafu G |

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Úvod | 3 |
| 1.1 | Matice sousednosti a spektrum grafu | 3 |
| 1.2 | Laplaceova matice | 4 |
| 1.3 | Vážený graf | 6 |
| 1.4 | Automorfismus grafu | 7 |
| 1.5 | Spektrum vybraných tříd grafů | 8 |
| 1.5.1 | Kompletní (úplný) graf | 8 |
| 1.5.2 | Kompletní bipartitní graf | 9 |
| 1.5.3 | Cesta | 9 |
| 1.5.4 | Cyklus | 9 |
| 1.5.5 | Hvězda | 10 |
| 1.5.6 | Hyperkrychle | 10 |
| 1.6 | Kartézský součin | 11 |
| 2 | Operace s grafy | 14 |
| 2.1 | Odebrání vrcholu | 14 |
| 2.2 | Odebrání hrany | 15 |
| 2.3 | Příklad operací s grafy - strom | 17 |
| 2.4 | Příklad operací s grafy - cyklus | 22 |
| 2.5 | Příklad operací s grafy - kompletní graf | 26 |
| 2.6 | Line graf | 31 |
| 2.7 | Doplňek grafu | 34 |
| 2.7.1 | Samodoplňkový graf | 35 |
| 3 | Závěr | 37 |
| 4 | Literatura | 38 |

Seznam obrázků

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Kompletní (úplný) graf K_4 | 4 |
| 2 | Kompletní graf K_3 | 6 |
| 3 | Kompletní graf K_3 s ohodnocením hran | 6 |
| 4 | Kompletní graf K_5 | 8 |
| 5 | Kompletní graf K_8 | 8 |
| 6 | Kompletní bipartitní graf $K_{3,3}$, barevně jsou označeny vrcholy z partit . . | 9 |
| 7 | Cesta P_6 | 9 |
| 8 | Cyklus C_6 | 10 |
| 9 | Hvězda $K_{1,7}$ | 10 |
| 10 | Hyperkrychle, $n = 3$ | 11 |
| 11 | Hyperkrychle Q_1 | 11 |
| 12 | Hyperkrychle Q_2 | 12 |
| 13 | Hyperkrychle Q_3 | 13 |
| 14 | Hyperkrychle Q_4 | 13 |
| 15 | Graf G | 17 |
| 16 | Graf H_1 | 18 |
| 17 | Graf H_2 | 20 |
| 18 | Graf H_3 | 21 |
| 19 | Cyklus C_6 | 22 |
| 20 | Cesta P_5 | 23 |
| 21 | Cesta P_6 | 24 |
| 22 | Kompletní graf K_6 | 26 |
| 23 | Kompletní graf $K_6 - \{e_1\}$ s jednou odebranou hranou | 26 |
| 24 | Kompletní graf $K_6 - \{e_1, e_2\}$ se dvěma odebranými hranami | 27 |
| 25 | Kompletní graf $K_6 - \{e_1, e_2, e_3\}$ se třemi odebranými hranami, varianta a . | 28 |
| 26 | Kompletní graf $K_6 - \{e_1, e_2, e_3\}$ se třemi odebranými hranami, varianta b . | 29 |
| 27 | Kompletní graf K_5 | 29 |
| 28 | Kompletní graf K_4 | 30 |
| 29 | Příklady trojúhelníkových grafů $T(n)$ | 31 |
| 30 | Příklady grafu mřížka | 32 |
| 31 | Petersenův graf | 32 |
| 32 | Hvězda S_6 a kompletní graf K_5 (neboli $(S_6)^l$) | 33 |
| 33 | Graf S_6 spolu se svým line grafem $(S_6)^l \simeq K_5$ | 34 |
| 34 | Cesta P_4 a její doplněk $\overline{P_4}$ | 36 |

1 Úvod

Nechť A je reálná matice řádu n . Vlastní vektor matice A je takový vektor, že Ax je paralelní k vektoru x , jinými slovy, $Ax = \lambda x$ pro nějaké reálné číslo λ . Takové číslo λ nazýváme vlastním číslem matice A patřící vlastnímu vektoru x . Přesněji λ je vlastní číslo matice právě tehdy, když matice $A - \lambda I$ je singulární (A je čtvercová matice, jejíž determinant je roven nule), kde I je jednotková matice. Proto má matice A vždy n vlastních čísel, z nichž se některá mohou opakovat. Počet opakování nazýváme algebraickou násobností vlastního čísla. Vlastní číslo s algebraickou násobností 1 se nazývá jednoduché. Vlastní číslo, které není jednoduché, se nazývá násobné.

Laplaceova matice jednoduchého grafu je rozdíl diagonální matice (čtvercová matice, která má nenulové prvky pouze na hlavní diagonále, konkrétně těmi prvky jsou stupně vrcholů grafu) a matice sousednosti, tedy $L = D - A$.

1.1 Matice sousednosti a spektrum grafu

Nechť G je graf s množinou vrcholů $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Matice sousednosti grafu G je definována jako čtvercová matice řádu n (n řádků a n sloupců), ve které je prvek $a_{ij} = 1$ právě tehdy, když jsou vrcholy v_i a v_j sousední. V opačném případě je $a_{ij} = 0$.

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } v_i \text{ a } v_j \text{ jsou sousední,} \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Z definice vyplývá, že A je reálná symetrická matice a stopa matice A (součet prvků na hlavní diagonále čtvercové matice) je nula.

Matice A_G je pro jednoduché grafy symetrická a součet čísel v i -tém řádku (v i -tém sloupci) matice A_G je roven stupni vrcholu $\deg(v_i)$.

Definice 1.1 *Spektrum grafu G je množina čísel, která má vlastní čísla matice A_G , spolu s jejich násobností. Jestliže má A různá vlastní čísla $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{s-1}$ a jejich násobnost je $m(\lambda_0), m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_{s-1})$, pak můžeme psát:*

$$\text{spektrum } G = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{s-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \dots & m(\lambda_{s-1}) \end{bmatrix}.$$

Mocninově zapsáno, spektrum grafu je $\lambda_0^{m(\lambda_0)}, \lambda_1^{m(\lambda_1)}, \dots, \lambda_{s-1}^{m(\lambda_{s-1})}$.

Příklad 1.1

Mějme kompletní (úplný) graf K_n s n vrcholy, ve kterém každý jednotlivý pár vrcholů sousedí. Tedy graf K_4 (viz obrázek 1) má matici sousednosti

$$A_{K_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

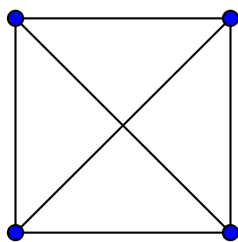
a jednoduchý výpočet ukazuje, že spektrum grafu K_4 je

$$\text{spektrum } K_4 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pro spektrum kompletního grafu obecně platí

$$\text{spektrum } K_n = \begin{bmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{bmatrix}.$$

V tomto příkladu máme spektrum zapsáno maticově, ovšem lze jej zapsat i jako $(n-1)^1, (-1)^{n-1}$, kde exponenty označují násobnost (počet opakování vlastního čísla). V případě kompletního grafu K_4 je jeho spektrum rovno $3^1, (-1)^3$. [1]



Obrázek 1: Kompletní (úplný) graf K_4

1.2 Laplaceova matice

Laplaceova matice řádu n grafu G je definována jako matice $L_G = (L_{ij})$, ve které

$$L_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{když } i=j, \\ -A_{ij} & \text{když } i \neq j. \end{cases}$$

Tady \deg_{v_i} označuje stupeň vrcholu v_i . V případě vážených grafů (grafy s ohodnocením svých hran reálnými čísly) definujeme

$$\deg(v_i) = \sum_j (A_{ij},)$$

kde A_{ij} je ohodnocená hrana.

Matici $L_G = D_G - A_G$ nazýváme Laplaceovou maticí grafu G , jestliže D_G je diagonální matice se stupni vrcholů grafu G a A_G je matice sousednosti grafu G .

Příklad 1.2

Nyní si vezměme příklad kompletního grafu K_4 , pro který jsme si již v příkladu 1.1 ukázali, že jeho matice sousednosti je

$$A_{K_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonální matice grafu K_4 se rovná

$$D_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Laplaceovou matici získáme ze vzorce $L_{K_4} = D_{K_4} - A_{K_4}$, v našem případě tedy

$$L_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matice A_{K_4} a L_{K_4} jsou symetrické, tudíž všechna jejich vlastní čísla jsou reálná. Výsledkem tedy je, že spektrum matice sousednosti A_{K_4} je rovno $3^1, (-1)^3$ a spektrum Laplaceovy matice L_{K_4} je rovno $0, 4^3$.

O spektru Laplaceovy matice toho již bylo hodně dokázáno. Tvrzení, jak bude vypadat největší vlastní číslo, jeho horní a dolní hranice, druhé největší vlastní číslo, nebo naopak druhé nejmenší vlastní číslo, můžeme najít v článku [3]. Cílem této práce ovšem není zjišťovat, která vlastní čísla Laplaceových matic jsou ta nejmenší či největší. Uvedeme si pouze tvrzení o spodní hranici pro největší vlastní číslo Laplaceovy matice.

Věta 1.1 *Nechť graf G je graf na n vrcholech a maximálním stupněm Δ . Pak*

$$\lambda_1(G) \geq \frac{n}{n-1}\Delta.$$

Věta 1.2 *Nechť G je jednoduchý souvislý graf s alespoň jednou hranou a maximálním stupněm Δ . Pak rovnost*

$$\lambda_1(G) \geq \Delta + 1$$

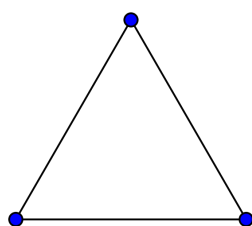
nastane tehdy a jen tehdy, pokud existuje vrchol, který sousedí se všemi ostatními vrcholy v grafu G .

1.3 Vážený graf

Graf, který je ohodnocený (hranám nebo vrcholům jsou přiřazena nenulová čísla), se nazývá vážený graf. Matici sousednosti tohoto váženého grafu můžeme modifikovat, když místo jedniček položíme každý prvek a_{ij} roven ohodnocení hrany $v_i v_j$. Nenulová ohodnocení vrcholu v_i můžeme uložit na hlavní diagonálu v prvku a_{ii} . Stupeň vrcholu v_i je počet nenulových prvků v řádku (sloupci) s výjimkou prvku a_{ii} matice sousednosti. [6]

Příklad 1.3

Rozebereme si, jak se změni vlastní čísla v kompletním grafu K_3 a ohodnoceném kompletním grafu K_3 .

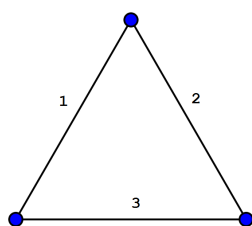


Obrázek 2: Kompletní graf K_3

Matice sousednosti grafu K_3 je

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spektrum tohoto grafu je $2^1, (-1)^2$.



Obrázek 3: Kompletní graf K_3 s ohodnocením hran

Matice sousednosti váženého grafu K_3 je

$$K_{3(oh)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spektrum váženého grafu K_3 je $-3,2019; -0,9112; 4,1131$. Oproti neohodnocenému kompletnímu grafu K_3 se spektrum podstatně liší.

U kompletního grafu K_3 na obrázku 2 jsou vlastními čísly $(-1)^2, 2$. U ohodnoceného grafu K_3 na obrázku 3 jsou vlastní čísla různá, což souvisí s pojmem automorfismu. Z toho plyne, že ohodnocený graf nelze usuzovat o nenulových vlastních číslech na základě vlastních čísel neohodnoceného grafu a naopak.

1.4 Automorfismus grafu

Automorfismus grafu G je permutace π množiny vrcholů $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, která má tu vlastnost, že množina $\{u, v\}$ je hrana grafu G tehdy a jen tehdy, pokud platí, že $\{\pi(u), \pi(v)\}$ je také hrana grafu G . Množina všech automorfismů grafu G s operací skládání je grupa automorfismů označena jako $Aut(G)$. Permutace π množiny vrcholů $V(G)$ může být reprezentována jako permutační matice $P = (p_{ij})$, kde $p_{ij} = 1$ pokud $v_i = \pi(v_j)$ a v ostatních případech $p_{ij} = 0$.

Věta 1.3 *Nechť A je matice sousednosti grafu G a π je permutace množiny vrcholů $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Pak π je automorfismus grafu G tehdy a jen tehdy, pokud $PA = AP$, kde P je permutační matice reprezentující π . [1]*

Důkaz. Nechť $v_h = \pi(v_i)$ a $v_k = \pi(v_j)$. Pak

$$\begin{aligned} (PA)_{hj} &= \sum (p_{hl}a_{lj}) = a_{ij}; \\ (AP)_{hj} &= \sum (p_{hl}a_{lj}) = a_{hk}. \end{aligned}$$

To tedy znamená, že $PA = AP$ tehdy a jen tehdy, pokud v_i a v_j jsou sousední kdykoliv jsou sousední i v_h a v_k . Což nastane tehdy, když π je automorfismem grafu G . \square

Výsledkem je, že automorfismus vytváří více stejných vlastních vektorů a jim odpovídajících vlastních čísel. Předpokládejme, že x je vlastní vektor matice A s příslušným vlastním číslem λ . Pak

$$APx = PAx = P\lambda x = \lambda Px.$$

To znamená, že Px je také vlastní vektor matice A s vlastním číslem λ . Jsou-li x a Px lineárně nezávislé, pak λ není jednoduché vlastní číslo. (Vlastní číslo s algebraickou násobností 1 se nazývá jednoduché. Vlastní číslo, které není jednoduché se nazývá násobné).

1.5 Spektrum vybraných tříd grafů

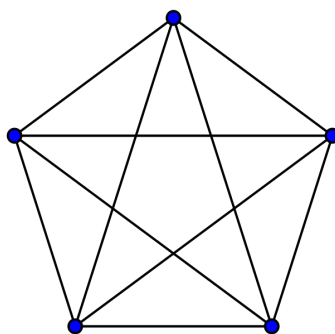
Všechny grafy v části 1.4 jsou jednoduché, neorientované a konečné. Všimněme si, že všechny matice J řádu n (matice, která obsahuje samé jedničky) mají hodnotu 1 a že u všech je vektor $\mathbf{1}$ vlastním vektorem s n vlastními čísly.

1.5.1 Kompletní (úplný) graf

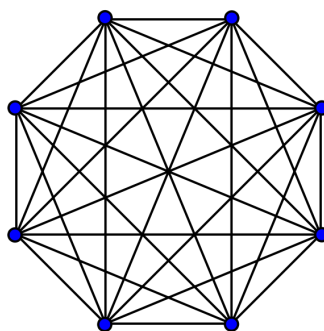
Nechť G je kompletní graf K_n na n vrcholech. Jeho matice sousednosti je $A = J - I$, kde J je matice, která obsahuje samé jedničky a I je jednotková matice. Spektrum kompletního grafu je $(n-1)^1, (-1)^{n-1}$, kde exponenty označují násobnost vlastních čísel. Tedy

$$\lambda_n = \begin{cases} 0 & n=0, \\ \{0^1\} & n=1, \\ \{(n-1)^1, (-1)^{n-1}\} & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Laplaceova matice je ve tvaru $nI - J$ a její spektrum je $0^1, n^{n-1}$. [4]



Obrázek 4: Kompletní graf K_5



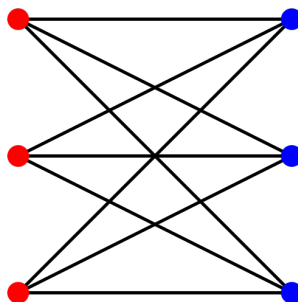
Obrázek 5: Kompletní graf K_8

1.5.2 Kompletní bipartitní graf

Graf, jehož vrcholová množina je sjednocením dvou neprázdných disjunktních množin U, W a množina hran je $E = \{uw : u \in U \wedge w \in W\}$, se nazývá kompletní bipartitní graf s partitami U a W . Kompletní bipartitní graf značíme $K_{m,n}$, kde $m = |U|$ a $n = |W|$. [6]

Spektrum kompletního bipartitního grafu $K_{m,n}$ je $\pm\sqrt{mn}, 0^{m+n-2}$.

Spektrum Laplaceovy matice kompletního bipartitního grafu je $0^1, m^{n-1}, n^{m-1}, (m+n)^1$. [4]



Obrázek 6: Kompletní bipartitní graf $K_{3,3}$, barevně jsou označeny vrcholy z partit

1.5.3 Cesta

Nechť graf G je neorientovaná cesta P_n s n vrcholy. Cesta neboli lineární graf je jednoduchý příklad stromu, tj. strom s dvěma nebo více vrcholy, které nejsou rozvětvené. Obsahuje dva koncové vrcholy stupně 1, zatímco všechny ostatní vrcholy jsou stupně 2.

Spektrum cesty je $2\cos(\pi j/(n+1)) (j = 1, \dots, n)$.

Spektrum Laplaceovy matice pro cestu je pak $2 - 2\cos(\pi j/n) (j = 0, \dots, n-1)$. Násobnost každého vlastního čísla je 1. [4]



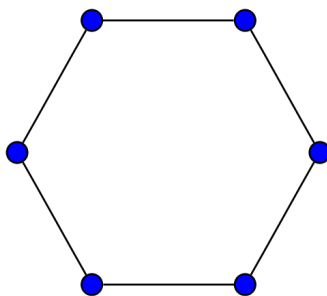
Obrázek 7: Cesta P_6

1.5.4 Cyklus

Cyklus je kruhový graf C_n pro n alespoň 3, který se skládá z jediného cyklu. Tvoří ho posloupnost propojených vrcholů. Počet vrcholů v cyklu se rovná počtu hran a každý vrchol je stupně 2.

Spektrum cyklu je $2\cos(2\pi j/n) (j = 0, \dots, n-1)$.

Spektrum Laplaceovy matice pro cyklus je $2 - 2\cos(2\pi j/n) (j = 0, \dots, n-1)$. [4]

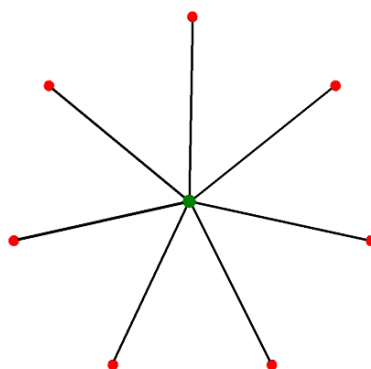
Obrázek 8: Cyklus C_6

1.5.5 Hvězda

Hvězda S_k je kompletní bipartitní graf $K_{1,k}$: strom s jedním uzlem a k listy, ve kterém k vrcholů je stupně 1 a jeden vrchol je stupně k .

Spektrum hvězdy bude stejné jako u kompletního bipartitního grafu, tedy $K_{1,k}$ má vlastní čísla $\pm\sqrt{k}, 0^{1+k-2}$.

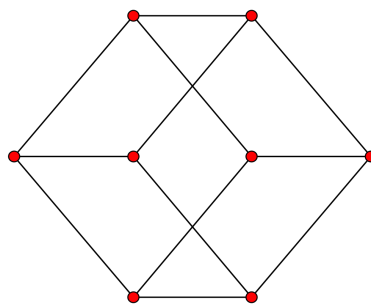
Spektrum Laplaceovy matice kompletního bipartitního grafu $K_{1,k}$ je $0^1, (1+k)^1, 1^{k-1}, k$.

Obrázek 9: Hvězda $K_{1,7}$

1.5.6 Hyperkrychle

Hyperkrychle řádu n (označeno jako Q_n) je graf, za jehož vrcholy vezmeme binární vektory délky n , kde dva vektory jsou sousední, jestliže se liší v právě jedné souřadnici (například 01011 a 01001 jsou sousední). Hyperkrychle řádu 0 je úplný graf K_1 , hyperkrychle řádu 1 je úplný graf K_2 nebo $K_{1,1}$, hyperkrychle řádu 2 je cyklus C_4 . [4]

Spektrum krychle se skládá z vlastních čísel $n-2i$ s násobností $\binom{n}{i}$, kde $(0 \leq i \leq n)$.

Obrázek 10: Hyperkrychle, $n = 3$

1.6 Kartézský součin

Kartézským součinem $G \times H$ grafů G a H je graf, jehož vrcholová množina obsahuje všechny uspořádané dvojice vrcholů grafů G a H a dva vrcholy $(u_1; v_1)$ a $(u_2; v_2)$ jsou spojeny hranou právě tehdy, když platí $u_1 = u_2$ a $v_1 v_2 \in E(H)$ nebo $v_1 = v_2$ a $u_1 u_2 \in E(G)$. [6]

Kartézský součin grafů G a H můžeme značit jednak jako $G \times H$, nebo jako $G \square H$.

Například hyperkrychle Q_n , také nazývaná 2^n je kartézský součin n faktorů K_2 . Spektrum K_2 je 1, -1, a tedy spektrum Q_2 se skládá z čísel $n - 2i$ s násobností $\binom{n}{i}$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Označme si vlastní čísla grafu $G = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ a vlastní čísla grafu $H = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$. $G \square H$ má vlastní čísla $\lambda_i + \sigma_j$, kde $i \in 1, 2, \dots, n$ a $j \in 1, 2, \dots, m$.

Příklad 1.4

- Hyperkrychle $Q_1(K_{1,1})$

Vlastní čísla tohoto grafu jsou -1 a 1.

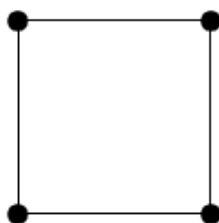
- Pro $i = 0$ získáváme výpočtem ze vzorce $n - 2i = 1 - 0 = 1$ vlastní číslo 1, násobnost tohoto vlastního čísla pak dostaneme ze vzorce $\binom{n}{i} = \binom{1}{0} = 1$.
- Pro $i = 1$ získáváme výpočtem ze vzorce $n - 2i = 1 - 2 = -1$ vlastní číslo -1, násobnost tohoto vlastního čísla pak dostaneme ze vzorce $\binom{n}{i} = \binom{1}{1} = 1$.

Obrázek 11: Hyperkrychle Q_1

- Hyperkrychle $Q_2 (\simeq C_4 \simeq K_{2,2})$

Tuto hyperkrychli získáme kartézským součinem grafu Q_1 tak, že $Q_2 = Q_1 \square Q_1$. Součtem vlastních čísel grafu Q_1 (tedy $(-1, 1)$) získáváme vlastní čísla $-2, 0, 0, 2$.

- Pro $i = 0$ získáváme výpočtem ze vzorce $n - 2i = 2 - 0 = 2$ vlastní číslo 2, násobnost tohoto vlastního čísla pak dostaneme ze vzorce $\binom{n}{i} = \binom{2}{0} = 1$.
 - Pro $i = 1$ získáváme výpočtem ze vzorce $n - 2i = 2 - 2 = 0$ vlastní číslo 0, násobnost tohoto vlastního čísla pak dostaneme ze vzorce $\binom{n}{i} = \binom{2}{1} = 2$.
 - Pro $i = 2$ získáváme výpočtem ze vzorce $n - 2i = 2 - 4 = -2$ vlastní číslo -2 , násobnost tohoto vlastního čísla pak dostaneme ze vzorce $\binom{n}{i} = \binom{2}{2} = 1$.
- Víme, že $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \sigma_1 = -1, \sigma_2 = 1$, můžeme tedy vlastní čísla hyperkrychle dostat ze součtu $\lambda_1 + \sigma_1 = -1 + (-1) = -2$. Stejně tak další vlastní číslo získáme součtem $\lambda_1 + \sigma_2 = -1 + 1 = 0$. Dále $\lambda_2 + \sigma_1 = 1 + (-1) = 0$, a poslední vlastní číslo $\lambda_2 + \sigma_2 = 1 + 1 = 2$.

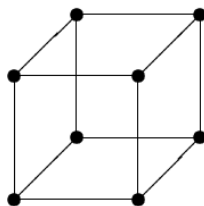


Obrázek 12: Hyperkrychle Q_2

- Hyperkrychle Q_3

Tuto hyperkrychli získáme kartézským součinem grafů Q_1 a Q_2 tak, že $Q_3 = Q_1 \square Q_2$. Součtem vlastních čísel grafů Q_1 (tedy $(-1, 1)$) a Q_2 $(-2, 0, 0, 2)$ získáváme vlastní čísla $-3, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 3$.

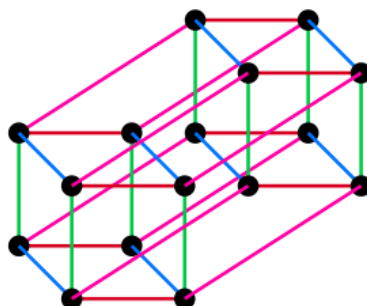
- Pro $i = 0$ získáváme výpočtem ze vzorce $n - 2i = 3 - 0 = 3$ vlastní číslo 3, násobnost tohoto vlastního čísla pak dostaneme ze vzorce $\binom{n}{i} = \binom{3}{0} = 1$.
- Pro $i = 1$ získáváme výpočtem ze vzorce $n - 2i = 3 - 2 = 1$ vlastní číslo 1, násobnost tohoto vlastního čísla pak dostaneme ze vzorce $\binom{n}{i} = \binom{3}{1} = 3$.
- Pro $i = 2$ získáváme výpočtem ze vzorce $n - 2i = 3 - 4 = -1$ vlastní číslo -1 , násobnost tohoto vlastního čísla pak dostaneme ze vzorce $\binom{n}{i} = \binom{3}{2} = 3$.
- Pro $i = 3$ získáváme výpočtem ze vzorce $n - 2i = 3 - 6 = -3$ vlastní číslo -3 , násobnost tohoto vlastního čísla pak dostaneme ze vzorce $\binom{n}{i} = \binom{3}{3} = 1$.

Obrázek 13: Hyperkrychle Q_3

- Hyperkrychle Q_4

Tuto hyperkrychli získáme kartézským součinem grafů Q_1 a Q_3 tak, že $Q_4 = Q_1 \square Q_3$ nebo kartézským součinem grafu Q_2 tak, že $Q_4 = Q_2 \square Q_2$. Součtem vlastních čísel grafů Q_1 (tedy $(-1, 1)$) a Q_3 $(-3, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 3)$ získáváme vlastní čísla $-4, -2, -2, -2, -2, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 4$. Úplně stejná vlastní čísla získáme součtem vlastních čísel grafu Q_2 (tedy $(-2, 0, 0, 2), (-2, 0, 0, 2)$).

- Pro $i = 0$ získáváme výpočtem ze vzorce $n - 2i = 4 - 0 = 4$ vlastní číslo 4, násobnost tohoto vlastního čísla pak dostaneme ze vzorce $\binom{n}{i} = \binom{4}{0} = 1$.
- Pro $i = 1$ získáváme výpočtem ze vzorce $n - 2i = 4 - 2 = 2$ vlastní číslo 2, násobnost tohoto vlastního čísla pak dostaneme ze vzorce $\binom{n}{i} = \binom{4}{1} = 4$.
- Pro $i = 2$ získáváme výpočtem ze vzorce $n - 2i = 4 - 4 = 0$ vlastní číslo 0, násobnost tohoto vlastního čísla pak dostaneme ze vzorce $\binom{n}{i} = \binom{4}{2} = 6$.
- Pro $i = 3$ získáváme výpočtem ze vzorce $n - 2i = 4 - 4 = -2$ vlastní číslo -2 , násobnost tohoto vlastního čísla pak dostaneme ze vzorce $\binom{n}{i} = \binom{4}{3} = 4$.
- Pro $i = 4$ získáváme výpočtem ze vzorce $n - 2i = 4 - 8 = -4$ vlastní číslo -4 , násobnost tohoto vlastního čísla pak dostaneme ze vzorce $\binom{n}{i} = \binom{4}{4} = 1$.

Obrázek 14: Hyperkrychle Q_4

Na základě kartézského součinu můžeme určit spektrum některých grafů. Jednak menších grafů, jako byly zde na příkladu ukázány hyperkrychle Q_1, Q_2, Q_3 a Q_4 , ale také mřížek (kartézských součinů cest) velkých rozměrů.

2 Operace s grafy

V této kapitole se budeme zkoumat, co se stane s vlastními čísly, pokud v grafu odebereme hranu nebo vrchol.

Pokud e je hrana grafu G , $G-e$ označuje graf na stejné množině vrcholů s množinou hran $E(G) \setminus e$.

Pokud v je vrchol grafu G , $G-v$ označuje graf na množině vrcholů $V(G) \setminus v$ a jeho množina hran se liší od původní tím, že neobsahuje hrany vrcholu v .

Věta 2.1 *Graf je stromem právě tehdy, když mezi každými dvěma jeho vrcholy existuje právě jedna cesta. [6]*

Strom s jediným vrcholem se nazývá triviální strom. V opačném případě budeme strom nazývat netriviální. Vrchol stupně 1 v grafu se nazývá list.

2.1 Odebrání vrcholu

Věta 2.2 *Odebráním libovolného listu z netriviálního stromu na n vrcholech dostaneme strom na $n - 1$ vrcholech.*

Věta 2.3 *Nechť A je reálná symetrická $n \times n$ matice a B je $(n - 1) \times (n - 1)$ hlavní submatice matice A (čtvercová submatice, ve které se indexy řádků a sloupců rovnají). Jestliže*

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ a} \\ \theta_1 &\geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_{n-1}\end{aligned}$$

jsou vlastní čísla matic A a B , pak

$$\lambda_1 \geq \theta_1 \geq \lambda_2 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_{n-1} \geq \lambda_n.$$

Nechť G je graf řádu n a nechť graf H získáme z grafu G vztahem $H = G - v$, kde v je vrchol grafu G . Věta 2.3 nám ukazuje prokládání vlastních čísel matice sousednosti A_G grafu G a vlastních čísel matice sousednosti A_H , které nazýváme vrcholovou verzi prokládání vlastních čísel (tj. nejmenší reálné vlastní číslo matice je menší než nejmenší reálné vlastní číslo každé její hlavní submatice). Věta 2.3 se přímo nevztahuje ke standardnímu Laplacianu matic G a H , protože hlavní submatice standardního Laplacianu již nemusí být standardní Laplacian z podgrafu. Nicméně, následující známý výsledek odráží hranovou verzi prokládání vlastních čísel. [5]

Věta 2.4 *Nechť A je reálná symetrická $n \times n$ matice a B je $r \times r$ ($1 \leq r \leq n$) hlavní submatice matice A , která vznikla odstraněním $n - r$ řádků a odpovídajících sloupců v matici A . Jestliže*

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \\ \theta_1 &\geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_r\end{aligned}$$

jsou vlastní čísla matic A a B , pak pro každé celé číslo i takové, že $1 \leq i \leq r$ platí

$$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+n-r}.$$

Věta 2.5 *Nechť G je graf a $H = G - v$, kde v je vrchol grafu G . Jestliže*

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ a} \\ \theta_1 &\geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_{n-1}\end{aligned}$$

jsou vlastní čísla matic A_G a A_H , pak

$$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} \text{ pro každé } i = 1, 2, 3, 4, \dots, n-1.$$

Věta 2.6 [5] *Nechť G je graf řádu n a nechť $H = G - v$, kde v je vrchol grafu G stupně r . Jestliže*

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = 0 \\ \theta_1 &\geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_{n-1} = 0\end{aligned}$$

jsou vlastní čísla Laplaceových matic L_G a L_H , pak

$$\lambda_i \geq \theta_i \geq \lambda_{i+r} \text{ pro každé } i = 1, 2, 3, 4, \dots, n-1,$$

kde $\lambda_i = 0$ pro $i \geq n+1$.

2.2 Odebrání hrany

Věta 2.7 [5] *Nechť G je graf a nechť $H = G - e$, kde e je hrana grafu G . Jestliže*

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ a} \\ \theta_1 &\geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n\end{aligned}$$

jsou vlastní čísla matic A_G a A_H , pak

$$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1} \text{ pro každé } i = 2, 3, 4, \dots, n-1,$$

$$\theta_1 \geq \lambda_2 \text{ a } \theta_n \leq \lambda_{n-1}.$$

Důkaz. V článku [5] bylo dokázáno, že nechť $P = G - v$, kde v je vrchol grafu G , který je incidentní s hranou e . Nechť

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_{n-1}$$

jsou vlastní čísla matice A_P . Pak matice A_P je hlavní submatice obou matic A_G a A_H . Takže

$$\begin{aligned}\lambda_i &\geq \gamma_i \geq \lambda_{i+1} \text{ pro každé } i = 1, 2, 3, 4, \dots, n-1 \text{ a} \\ \theta_i &\geq \gamma_i \geq \theta_{i+1} \text{ pro každé } i = 1, 2, 3, 4, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Pak

$$\lambda_{i-1} \geq \gamma_{i-1} \geq \theta_i \geq \gamma_i \geq \lambda_{i+1}.$$

□

Analogicky tohle platí i pro Laplaceovu matici, což ukazuje věta 2.8.

Věta 2.8 *Nechť G je graf a $H = G - e$, kde e je hrana grafu G . Jestliže*

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = 0 \text{ a} \\ \theta_1 &\geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n = 0\end{aligned}$$

jsou vlastní čísla Laplaceovy matice L_G a L_H , pak

$$\lambda_1 \geq \theta_1 \geq \lambda_2 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_{n-1} \geq \lambda_n.$$

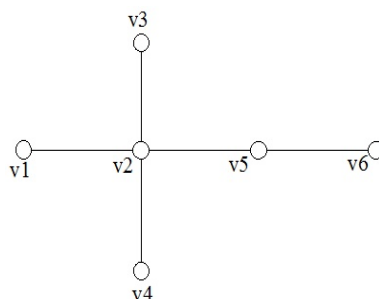
Důkaz. Víme, že matice S je incidenční matice, ve které jsou v řádcích indexovány vrcholy a ve sloupcích jsou indexovány hrany grafu G tak, aby každý sloupec odpovídal hraně $e = v_i v_j$ ($i < j$). Matice S má na řádku v_i číslo 1, v řádku v_j číslo -1 a nulu v ostatních případech. Vzhledem k tomu, že $L_G = S_G S_G^T$ je pozitivně semidefinitní, tak má nezáporná vlastní čísla. Navíc je číslo 0 vždy vlastní číslo L_G , jelikož vektor $(1, 1, \dots, 1)^T$ je odpovídající vlastní vektor. Ve skutečnosti, násobnost vlastního čísla 0 je rovna počtu souvislých komponent grafu G .

Víme, že $L_G = S_G S_G^T$ a že vlastní čísla této matice jsou nezáporná. Nechť graf H je podgraf grafu G získaný odstraněním hrany v grafu G a L_H je Laplaceova matice grafu H . Pro každou $n \times m$ matici A se spektra matic AA^T a $A^T A$ shodují s výjimkou násobnosti vlastního čísla 0. Zejména kladná vlastní čísla grafu L_G jsou stejná jako kladná vlastní čísla $S_G^T S_G$. Všimněme si, že $L_H = S_H S_H^T$ můžeme získat odstraněním řádku a sloupce odpovídající odstraněné hraně, takže $S_H^T S_H$ řádu $m - 1$ je hlavní submatice $S_G^T S_G$ (m je počet hran grafu G). [5] \square

Nyní si na příkladech 2.3, 2.4, 2.5 ukážeme využití vět z kapitoly 2.

2.3 Příklad operací s grafy - strom

Mějme graf G a grafy H_1, H_2, H_3 , které vznikly odebráním hrany v původním grafu G .



Obrázek 15: Graf G

Spektrum grafu G je $-2.0743, -0.8350, 0^2, 0.8350, 2.0743$.

Spektrum Laplaceovy matice grafu G je $0, 0.4859, 1^2, 2.4280, 5.0861$.

- Graf H_1

Mějme graf H_1 na obrázku 16.

Spektrum grafu H_1 je rovno $-1.8479, -0.7654, 0^2, 0.7654, 1.8478$. Spektrum Laplaceovy matice grafu H_1 je $0^2, 0.5188, 1, 2.3111, 4.1701$.

Nyní si seřadíme jednotlivá vlastní čísla dle věty 2.8, kde $\lambda_i \in G$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice původního grafu G a $\theta_i \in H_1$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice grafu H_1 po odebrání hrany. V tabulce vidíme, že vlastní čísla θ_i grafu H_1 se po odebrání hrany posunula blíže k nule.

| i | λ_i | θ_i |
|-----|-------------|------------|
| 1 | 5.0861 | 4.1701 |
| 2 | 2.4280 | 2.3111 |
| 3 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4 | 1.0000 | 0.5188 |
| 5 | 0.4859 | 0.0000 |
| 6 | 0.0000 | 0.0000 |

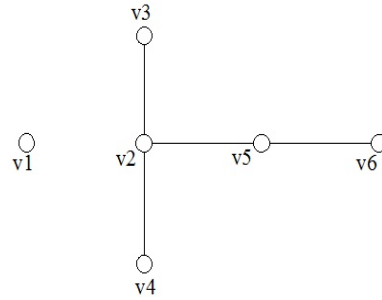
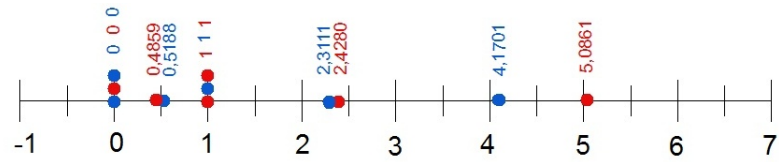
$$\begin{array}{ccccccccccc} \lambda_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \lambda_3 & \geq & \lambda_4 & \geq & \lambda_5 & \geq & \lambda_6 \\ 5.0861 & \geq & 2.4280 & \geq & 1.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & 0.4859 & \geq & 0.0000 = 0.0000 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \theta_1 & \geq & \theta_2 & \geq & \theta_3 & \geq & \theta_4 & \geq & \theta_5 & \geq & \theta_6 \\ 4.1701 & \geq & 2.3111 & \geq & 1.0000 & \geq & 0.5188 & \geq & 0.0000 & \geq & 0.0000 = 0.0000 \end{array}$$

Na příkladu ukážeme prokládání vlastních čísel dle věty 2.8.

$$\begin{array}{cccccccccccc} \lambda_1 & \geq & \theta_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \theta_2 & \geq & \lambda_3 & \geq & \theta_3 & \geq & \lambda_4 & \geq & \theta_4 & \geq \\ 5.0861 & \geq & 4.1701 & \geq & 2.4280 & \geq & 2.3111 & \geq & 1.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & 0.5188 & \geq \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \geq & \lambda_5 & \geq & \theta_5 & \geq & \lambda_6 & \geq & \theta_6 \\ \geq & 0.4859 & \geq & 0.0000 & \geq & 0.0000 & \geq & 0.0000 \end{array}$$

Obrázek 16: Graf H_1

$$A_{H_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_{H_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tabulka 1: Matice sousednosti a Laplaceova matice pro graf H_1

- Graf H_2

Mějme graf H_2 na obrázku 17. Spektrum grafu H_2 je rovno $-1.7321, -1, 0^2, 1, 1.7321$. Spektrum Laplaceovy matice je $0^2, 1^2, 2, 4$.

Nyní si seřaďme jednotlivá vlastní čísla dle věty 2.8, kde $\lambda_i \in G$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice původního grafu G a $\theta_i \in H_2$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice grafu H_2 po odebrání hrany. V tabulce vidíme, že vlastní čísla θ_i grafu H_2 se po odebrání hrany posunula blíže k nule.

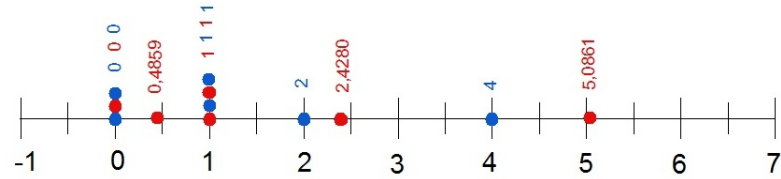
| i | λ_i | θ_i |
|-----|-------------|------------|
| 1 | 5.0861 | 4.0000 |
| 2 | 2.4280 | 2.0000 |
| 3 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4 | 1.0000 | 1.0000 |
| 5 | 0.4859 | 0.0000 |
| 6 | 0.0000 | 0.0000 |

$$\begin{array}{ccccccccccc} \lambda_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \lambda_3 & \geq & \lambda_4 & \geq & \lambda_5 & \geq & \lambda_6 \\ 5.0861 & \geq & 2.4280 & \geq & 1.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & 0.4859 & \geq & 0.0000 = 0.0000 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \theta_1 & \geq & \theta_2 & \geq & \theta_3 & \geq & \theta_4 & \geq & \theta_5 & \geq & \theta_6 \\ 4.0000 & \geq & 2.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & 0.0000 & \geq & 0.0000 = 0.0000 \end{array}$$

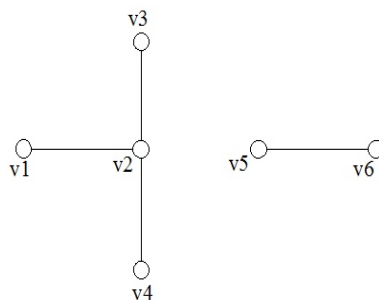
Na příkladu ukážeme prokládání vlastních čísel dle věty 2.8.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \lambda_1 & \geq & \theta_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \theta_2 & \geq & \lambda_3 & \geq & \theta_3 & \geq & \lambda_4 & \geq & \theta_4 & \geq & \lambda_5 & \geq & \theta_5 & \geq & \lambda_6 & \geq & \theta_6 \\ 5.0861 & \geq & 4 & \geq & 2.4280 & \geq & 2 & \geq & 1 & \geq & 1 & \geq & 1 & \geq & 1 & \geq & 0.4859 & \geq & 0 & \geq & 0 & \geq & 0 \end{array}$$



$$A_{H_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_{H_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tabulka 2: Matice sousednosti a Laplaceova matice pro graf H_2

Obrázek 17: Graf H_2

- Graf H_3

Mějme graf H_3 na obrázku 18. Spektrum grafu H_3 je rovno $-2, 0^4, 2$. Spektrum Laplaceovy matice je $0^2, 1^3, 5$.

Nyní si seřadíme jednotlivá vlastní čísla dle věty 2.8, kde $\lambda_i \in G$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice původního grafu G a $\theta_i \in H_3$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice grafu H_3 po odebrání hrany. V tabulce vidíme, že vlastní čísla θ_i grafu H_3 se po odebrání hrany posunula blíže k nule.

| i | λ_i | θ_i |
|-----|-------------|------------|
| 1 | 5.0861 | 5.0000 |
| 2 | 2.4280 | 1.0000 |
| 3 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4 | 1.0000 | 1.0000 |
| 5 | 0.4859 | 0.0000 |
| 6 | 0.0000 | 0.0000 |

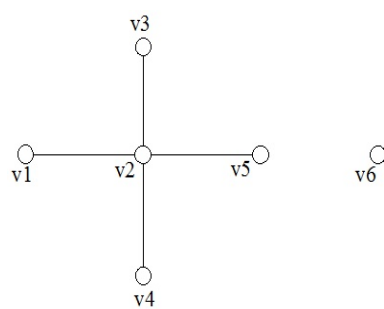
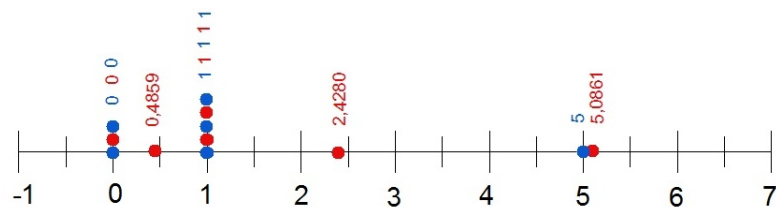
$$\begin{array}{ccccccccccc} \lambda_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \lambda_3 & \geq & \lambda_4 & \geq & \lambda_5 & \geq & \lambda_6 \\ 5.0861 & \geq & 2.4280 & \geq & 1.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & 0.4859 & \geq & 0.0000 = 0.0000 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \theta_1 & \geq & \theta_2 & \geq & \theta_3 & \geq & \theta_4 & \geq & \theta_5 & \geq & \theta_6 \\ 5.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & 0.0000 & \geq & 0.0000 = 0.0000 \end{array}$$

Na příkladu ukážeme prokládání vlastních čísel dle věty 2.8.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \lambda_1 & \geq & \theta_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \theta_2 & \geq & \lambda_3 & \geq & \theta_3 & \geq & \lambda_4 & \geq & \theta_4 & \geq & \lambda_5 & \geq & \theta_5 & \geq & \lambda_6 & \geq & \theta_6 \\ 5.0861 & \geq & 5 & \geq & 2.4280 & \geq & 1 & \geq & 1 & \geq & 1 & \geq & 1 & \geq & 1 & \geq & 0.4859 & \geq & 0 & \geq & 0 & \geq & 0 \end{array}$$

Na příkladu je pěkně vidět, co věta 2.8 říká, a sice že vlastní čísla původního grafu jsou větší než vlastní čísla grafu, který vznikl odebráním jedné hrany.

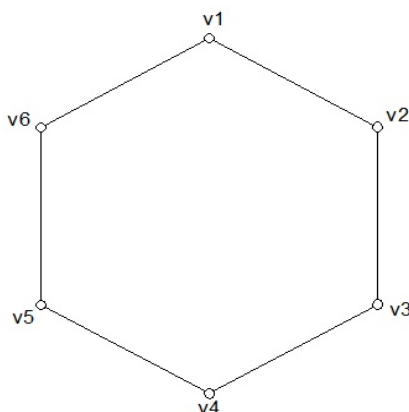
Obrázek 18: Graf H_3

$$A_{H_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_{H_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tabulka 3: Matice sousednosti a Laplaceova matice pro graf H_3

2.4 Příklad operací s grafy - cyklus

Mějme cyklus C_6 a cestu P_5 , která vznikne odebráním vrcholu původního grafu C_6 a cestu P_6 , která vznikne odebráním hrany v původním grafu C_6 . Porovnáme jejich spektra a ukážeme, jak se podle věty 2.3 prokládají vlastní čísla grafů C_6 a P_5 a podle věty 2.8 vlastní čísla grafů C_6 a P_6 .



Obrázek 19: Cyklus C_6

Spektrum grafu C_6 je $-2, -1^2, 1^2, 2$.

Spektrum Laplaceovy matice grafu C_6 je $0, 1^2, 3^2, 4$.

- Cesta P_5

Mějme graf P_5 na obrázku 20, který jsme získali z grafu $C_6 - v$.

Spektrum grafu P_5 je rovno $-1.7321, -1, 0, 1, 1.7321$.

Spektrum Laplaceovy matice je $0, 0.3820, 1.3820, 2.6180, 3.6180$.

Nyní si seřadíme jednotlivá vlastní čísla dle věty 2.3, kde $\lambda_i \in C_6$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla matice sousednosti původního grafu C_6 a $\theta_i \in P_5$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) jsou vlastní čísla matice sousednosti grafu P_5 po odebrání vrcholu:

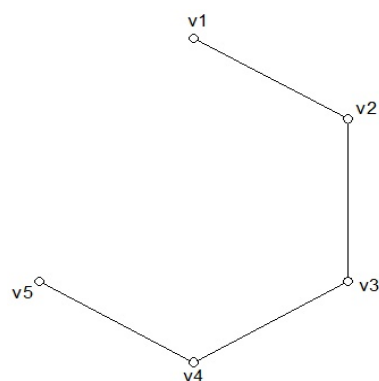
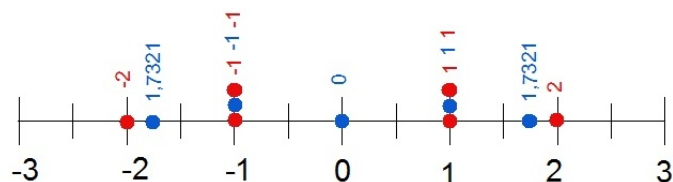
| i | λ_i | θ_i |
|-----|-------------|------------|
| 1 | 2.0000 | 1.7321 |
| 2 | 1.0000 | 1.0000 |
| 3 | 1.0000 | 0.0000 |
| 4 | -1.0000 | -1.0000 |
| 5 | -1.0000 | -1.7321 |
| 6 | -2.0000 | — |

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \lambda_3 & \geq & \lambda_4 & \geq & \lambda_5 & \geq & \lambda_6 \\ 2.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & -1.0000 & \geq & -1.0000 & \geq & -2.0000 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \theta_1 & \geq & \theta_2 & \geq & \theta_3 & \geq & \theta_4 & \geq & \theta_5 \\ 1.7321 & \geq & 1.0000 & \geq & 0.0000 & \geq & -1.0000 & \geq & -1.7321 \end{array}$$

Na příkladu ukážeme prokládání vlastních čísel dle věty 2.3.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \lambda_1 & \geq & \theta_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \theta_2 & \geq & \lambda_3 & \geq & \theta_3 & \geq & \lambda_4 & \geq & \theta_4 & \geq & \lambda_5 & \geq & \theta_5 & \geq & \lambda_6 \\ 2.0000 & \geq & 1.7321 & \geq & 1 & \geq & 1 & \geq & 1 & \geq & 0 & \geq & -1 & \geq & -1 & \geq & -1 & \geq & -1.7321 & \geq & -2 \end{array}$$



Obrázek 20: Cesta P_5

$$A_{P_5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_{P_5} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tabulka 4: Matice sousednosti a Laplaceova matice pro graf P_5

- Cesta P_6

Mějme graf P_6 na obrázku 21, který jsme získali z grafu $C_6 - e$.

Spektrum grafu P_6 je rovno $-1.8019, -1.2470, -0.4450, 0.4450, 1.2470, 1.8019$.

Spektrum Laplaceovy matice je $0, 0.2679, 1, 2, 3, 3.7321$. Nyní si seřaďme jednotlivá vlastní čísla dle věty 2.8, kde $\lambda_i \in C_6$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice původního grafu C_6 a $\theta_i \in P_6$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice grafu P_6 po odebrání hrany. V tabulce vidíme, že vlastní čísla θ_i grafu P_6 se po odebrání hrany posunula blíže k nule

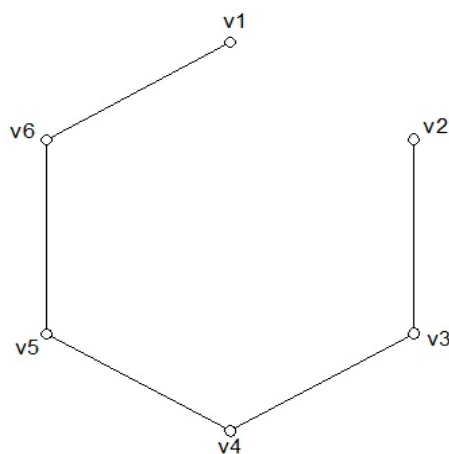
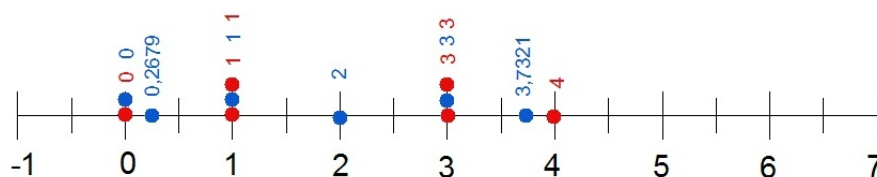
| i | λ_i | θ_i |
|-----|-------------|------------|
| 1 | 4.0000 | 3.7321 |
| 2 | 3.0000 | 3.0000 |
| 3 | 3.0000 | 2.0000 |
| 4 | 1.0000 | 1.0000 |
| 5 | 1.0000 | 0.2679 |
| 6 | 0.0000 | 0.0000 |

$$\begin{array}{ccccccccccc} \lambda_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \lambda_3 & \geq & \lambda_4 & \geq & \lambda_5 & \geq & \lambda_6 \\ 4.0000 & \geq & 3.0000 & \geq & 3.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & 0.0000 = 0.0000 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \theta_1 & \geq & \theta_2 & \geq & \theta_3 & \geq & \theta_4 & \geq & \theta_5 & \geq & \theta_6 \\ 3.7321 & \geq & 3.0000 & \geq & 2.0000 & \geq & 1.0000 & \geq & 0.2679 & \geq & 0.0000 = 0.0000 \end{array}$$

Na příkladu ukážeme prokládání vlastních čísel dle věty 2.8.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \lambda_1 & \geq & \theta_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \theta_2 & \geq & \lambda_3 & \geq & \theta_3 & \geq & \lambda_4 & \geq & \theta_4 & \geq & \lambda_5 & \geq & \theta_5 & \geq & \lambda_6 & \geq & \theta_6 \\ 4 & \geq & 3.7321 & \geq & 3 & \geq & 3 & \geq & 3 & \geq & 2 & \geq & 1 & \geq & 1 & \geq & 1 & \geq & 0.2679 & \geq & 0 & \geq & 0 \end{array}$$



Obrázek 21: Cesta P_6

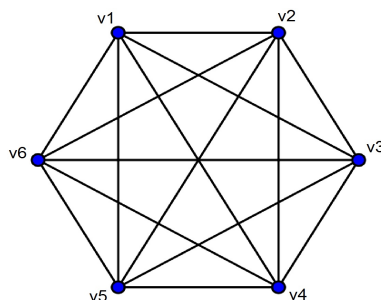
$$A_{P_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_{P_6} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tabulka 5: Matice sousednosti a Laplaceova matice pro graf P_6

Na příkladu je pěkně vidět, co věta 2.8 říká, a sice to, že vlastní čísla původního grafu C_6 jsou větší než vlastní čísla grafu P_6 , který vznikl odebráním jedné hrany. Dále vidíme, co věta 2.3 říká o vlastních číslech grafu P_5 po odebrání vrcholu. Vlastní čísla vzniklého grafu přesně zapadla mezi vlastní čísla původního grafu (je tedy splněn důkaz o prokládání vlastností vlastních čísel).

2.5 Příklad operací s grafy - kompletní graf

V tomto příkladě se podíváme, jak se změní vlastní čísla, odebereme-li buď jednu nebo dvě hrany, anebo jeden nebo dva vrcholy. Jako příklad si vezmeme kompletní graf K_6 . Na rozdíl od předchozích příkladů je tento graf hustý - má mnoho hran a malý počet vrcholů.

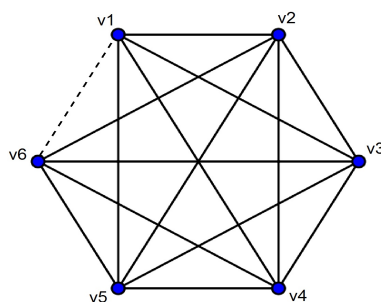


Obrázek 22: Kompletní graf K_6

Spektrum grafu K_6 je rovno -1^5 a 5 .

Spektrum Laplaceovy matice tohoto grafu je 0 a 6^5 .

Nejprve v grafu odebereme jednu hranu, vznikne tak graf na obrázku 23.



Obrázek 23: Kompletní graf $K_6 - \{e_1\}$ s jednou odebranou hranou

Vlastní čísla grafu $K_6 - \{e_1\}$ jsou -1.7016 , -1^3 , 0 , 4.7016 a jsou tedy jiná než u původního grafu K_6 . Spektrum Laplaceovy matice grafu $K_6 - \{e_1\}$ je rovno $0, 4, 6^4$.

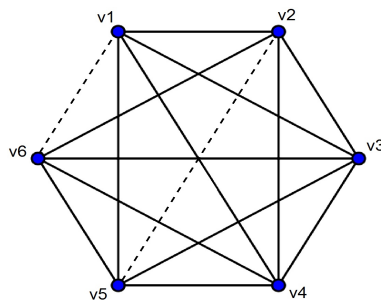
Na základě důkazu věty 2.8 vidíme, že číslo nula je vždy vlastním číslem Laplaceovy matice, protože jak již bylo řečeno v podkapitole 1.5.1 na straně 8, Laplaceova matice je ve tvaru $nI - J$ a její spektrum je $0^1, n^{n-1}$.

Co se týče prokládání vlastních čísel, bude platit věta 2.8. Nyní si seřadíme jednotlivá vlastní čísla, kde $\lambda_i \in K_6$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice původního grafu K_6 a $\theta_i \in K_6 - \{e_1\}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice grafu K_6 po odebrání hrany:

| i | λ_i | θ_i |
|-----|-------------|------------|
| 1 | 6 | 6 |
| 2 | 6 | 6 |
| 3 | 6 | 6 |
| 4 | 6 | 6 |
| 5 | 6 | 4 |
| 6 | 0 | 0 |

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \lambda_1 & \geq & \theta_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \theta_2 & \geq & \lambda_3 & \geq & \theta_3 & \geq & \lambda_4 & \geq & \theta_4 & \geq & \lambda_5 & \geq & \theta_5 & \geq & \lambda_6 & \geq & \theta_6 \\ 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 4 & \geq & 0 & \geq & 0 \end{array}$$

Nyní z grafu $K_6 - \{e_1\}$ odebereme další hranu. Získáme tak graf na obrázku 24.



Obrázek 24: Kompletní graf $K_6 - \{e_1, e_2\}$ se dvěma odebranými hranami

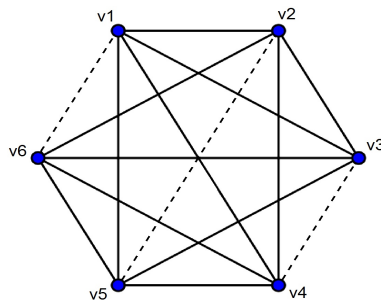
Spektrum grafu $K_6 - \{e_1, e_2\}$ je rovno $-2, -1.3723, -1, 0^2, 4.3723$. Nás ale zajímají především vlastní čísla Laplaceovy matice, která jsou $0, 4^2, 6^3$.

Opět se na tento graf podíváme co se týče prokládání vlastních čísel, věta 2.8 bude nadále splněna. Ověříme si to seřazením jednotlivých vlastních čísel, kde $\lambda_i \in K_6 - \{e_1\}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice grafu K_6 s jednou odebranou hranou a $\theta_i \in K_6 - \{e_1, e_2\}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice grafu K_6 po odebrání dvou hran:

| i | λ_i | θ_i |
|-----|-------------|------------|
| 1 | 6 | 6 |
| 2 | 6 | 6 |
| 3 | 6 | 6 |
| 4 | 6 | 4 |
| 5 | 4 | 4 |
| 6 | 0 | 0 |

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \lambda_1 & \geq & \theta_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \theta_2 & \geq & \lambda_3 & \geq & \theta_3 & \geq & \lambda_4 & \geq & \theta_4 & \geq & \lambda_5 & \geq & \theta_5 & \geq & \lambda_6 & \geq & \theta_6 \\ 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 4 & \geq & 4 & \geq & 4 & \geq & 0 & \geq & 0 \end{array}$$

Když grafu odebereme tři hrany, kde žádné dvě odebrané hrany nepatří jednomu vrcholu, vznikne tak graf na obrázku 25, jehož vlastní čísla Laplaceovy matice jsou rovna $0, 4^3, 6^2$. Prokládání vlastních čísel dle věty 2.8 bude platit, stejně jako u odebrání dvou hran.



Obrázek 25: Komplettní graf $K_6 - \{e_1, e_2, e_3\}$ se třemi odebranými hranami, varianta a

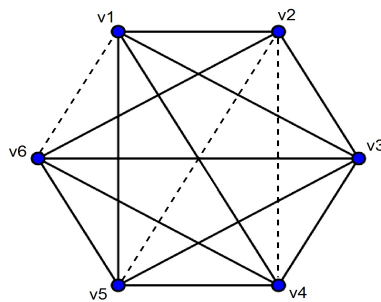
Opět se na tento graf podíváme co se týče prokládání vlastních čísel, věta 2.8 bude nadále splněna. Ověříme si to seřazením jednotlivých vlastních čísel, kde $\lambda_i \in K_6 - \{e_1, e_2\}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice grafu K_6 se dvěma odebranými hranami a $\theta_i \in K_6 - \{e_1, e_2, e_3\}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice grafu K_6 po odebrání tří hran:

| i | λ_i | θ_i |
|-----|-------------|------------|
| 1 | 6 | 6 |
| 2 | 6 | 6 |
| 3 | 6 | 4 |
| 4 | 4 | 4 |
| 5 | 4 | 4 |
| 6 | 0 | 0 |

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \lambda_1 & \geq & \theta_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \theta_2 & \geq & \lambda_3 & \geq & \theta_3 & \geq & \lambda_4 & \geq & \theta_4 & \geq & \lambda_5 & \geq & \theta_5 & \geq & \lambda_6 & \geq & \theta_6 \\ 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 4 & \geq & 4 & \geq & 4 & \geq & 4 & \geq & 4 & \geq & 0 & \geq & 0 \end{array}$$

Pokud ovšem odebereme další hrany z vrcholu, kterému již byla jedna hrana odebrána, změní se vlastní čísla úplně jinak. Vezměme si graf na obrázku 26, kde vrcholu v_2 byly odebrány dvě hrany.

Vlastními čísly Laplaceovy matice jsou nyní čísla $0, 3, 4, 5, 6^2$. Prokládání vlastních čísel dle věty 2.8 bude platit, stejně jako u odebrání dvou hran. Ověříme si to seřazením jednotlivých vlastních čísel, kde $\lambda_i \in K_6 - \{e_1, e_2\}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice grafu K_6 s dvěma odebranými hranami a $\theta_i \in K_6 - \{e_1, e_2, e_3\}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla Laplaceovy matice grafu K_6 po odebrání tří hran:

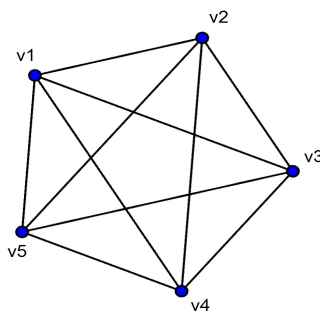


Obrázek 26: Kompletní graf $K_6 - \{e_1, e_2, e_3\}$ se třemi odebranými hranami, varianta b

| i | λ_i | θ_i |
|-----|-------------|------------|
| 1 | 6 | 6 |
| 2 | 6 | 6 |
| 3 | 6 | 5 |
| 4 | 4 | 4 |
| 5 | 4 | 3 |
| 6 | 0 | 0 |

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \lambda_1 & \geq & \theta_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \theta_2 & \geq & \lambda_3 & \geq & \theta_3 & \geq & \lambda_4 & \geq & \theta_4 & \geq & \lambda_5 & \geq & \theta_5 & \geq & \lambda_6 & \geq & \theta_6 \\ 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 6 & \geq & 5 & \geq & 4 & \geq & 4 & \geq & 4 & \geq & 3 & \geq & 0 & \geq & 0 \end{array}$$

Nyní se podíváme, zda prokládání vlastních čísel platí u odebírání vrcholů. Odebereme-li z grafu K_6 vrchol, vznikne tak graf K_5 , který vidíme na obrázku 27.



Obrázek 27: Kompletní graf K_5

Spektrum grafu K_5 je rovno $-1^4, 4$. Spektrum Laplaceovy matice tohoto grafu je rovno $0, 5^4$.

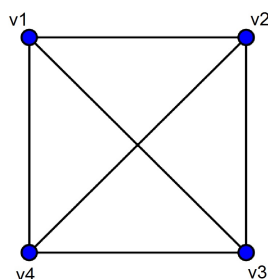
Nyní si seřadíme jednotlivá vlastní čísla matice sousednosti, kde $\lambda_i \in K_6$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) jsou vlastní čísla matice sousednosti původního grafu K_6 a $\theta_i \in K_5$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) jsou vlastní čísla matice sousednosti grafu K_5 po odebrání vrcholu:

| i | λ_i | θ_i |
|-----|-------------|------------|
| 1 | 5 | 4 |
| 2 | -1 | -1 |
| 3 | -1 | -1 |
| 4 | -1 | -1 |
| 5 | -1 | -1 |
| 6 | -1 | - |

$$\lambda_1 \geq \theta_1 \geq \lambda_2 \geq \theta_2 \geq \lambda_3 \geq \theta_3 \geq \lambda_4 \geq \theta_4 \geq \lambda_5 \geq \theta_5 \geq \lambda_6 \\ 5 \geq 4 \geq -1 \geq -1 \geq -1 \geq -1 \geq -1 \geq -1 \geq -1 \geq -1 \geq -1$$

Platí zde tedy věta 2.3 o prokládání vlastních čísel.

Nyní z grafu K_6 odebreme dva vrcholy. Vznikne tak graf K_4 (neboli $K_6 - \{v_1, v_2\}$), který vidíme na obrázku 28.



Obrázek 28: Kompletní graf K_4

Nyní si seřadíme jednotlivá vlastní čísla, kde $\lambda_i \in K_5$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) jsou vlastní čísla matice sousednosti grafu K_5 (neboli $K_6 - \{v_1\}$) a $\theta_i \in K_4$ ($i = 1, 2, 3, 4$) jsou vlastní čísla matice sousednosti grafu K_4 po odebrání dvou vrcholů:

| i | λ_i | θ_i |
|-----|-------------|------------|
| 1 | 4 | 3 |
| 2 | -1 | -1 |
| 3 | -1 | -1 |
| 4 | -1 | -1 |
| 5 | -1 | - |

$$\lambda_1 \geq \theta_1 \geq \lambda_2 \geq \theta_2 \geq \lambda_3 \geq \theta_3 \geq \lambda_4 \geq \theta_4 \geq \lambda_5 \\ 4 \geq 3 \geq -1 \geq -1 \geq -1 \geq -1 \geq -1 \geq -1 \geq -1$$

Vidíme, že zde věta 2.3 také platí.

Víme, že prokládání vlastních čísel u grafu, ze kterého odebíráme vrchol, platí dle věty 2.3 pro vlastní čísla matice sousednosti. Pokud bychom chtěli při problému odebrání vrcholu porovnávat vlastní čísla Laplaceovy matice, neplatily by požadované nerovnosti.

Stejný problém nastane u grafu, ze kterého odebíráme hranu. Prokládání vlastních čísel dle věty 2.8 totiž platí pro vlastní čísla Laplaceovy matice, při prokládání vlastních čísel matice sousednosti nebudou platit požadované nerovnosti.

2.6 Line graf

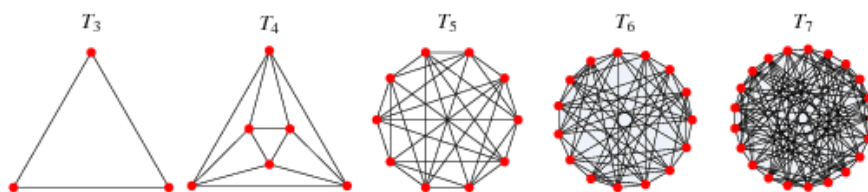
Line graf G^l grafu G je graf s množinou hran grafu G jako množinou vrcholů, kde dva vrcholy jsou sousední v případě, že odpovídající hrany grafu G mají společný vrchol. Line graf grafu G je tedy definován jako $V(G^l) = E(G)$, kde $E(G^l) = \binom{V}{2} \setminus E$. Jestliže N je incidenční matice grafu G , pak $N^T N - 2I$ je matice sousednosti line grafu G^l . Vzhledem k tomu, že $N^T N$ je pozitivně semidefinitní, vlastní čísla line grafu nejsou menší než -2 . Tyto výsledky jsou dokázány v [4].

Semiregulární graf $G = (V, E)$ je graf s partitami (V_1, V_2) takový, že všechny vrcholy V_1 mají stupeň jeden a vrcholy V_2 mají stupeň druhý.

Věta 2.9 [3] *Nechť G je jednoduchý souvislý graf. Pak line graf G^l grafu G je regulární nebo semiregulární tehdy a jen tehdy, jestliže graf G je regulární nebo semiregulární, nebo jestliže G je cesta P_4 .*

Důkaz. [3] Jestliže G^l je k -regulární, pak pro každou hranu $e_{uv} = (u, v) \in E(G)$ je stupeň vrcholu e_{uv} v grafu G^l roven $d_{G^l}(e_{uv}) = d_G(u) + d_G(v) - 2$. Proto pokud dva vrcholy grafu G mají společný vrchol, tak mají stejný stupeň. Jelikož graf G je souvislý, to znamená, že má nanejvýš dva různé stupně. Jsou-li dva sousední vrcholy stejného stupně, je snadné ukázat, že G je regulární. Pokud graf G obsahuje cyklus liché délky, pak musí mít dva sousední vrcholy se stejným stupněm. Z tohoto důvodu, pokud G není pravidelný, pak neobsahuje cyklus liché délky, což znamená, že G je bipartitní. Takže G je semiregulární. \square

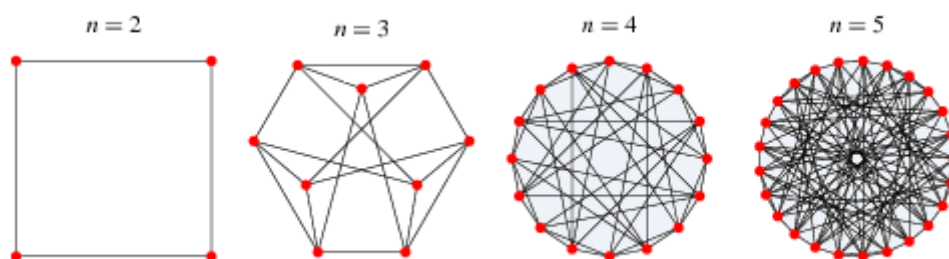
Line graf kompletního grafu K_n ($n \geq 2$) je znám jako trojúhelníkový graf $T(n)$. Jeho spektrum je rovno $2(n-2)^1, (n-4)^{n-1}, (-2)^{n(n-3)/2}$.



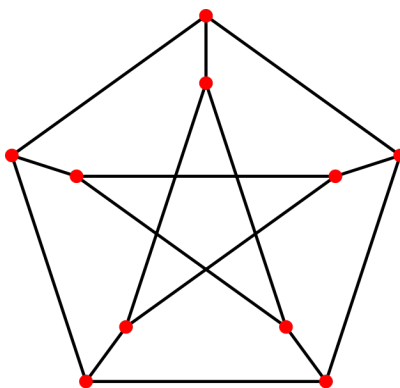
Obrázek 29: Příklady trojúhelníkových grafů $T(n)$

Line graf regulárního kompletního bipartitního grafu $K_{m,m}$ ($m \geq 2$) je znám jako graf mřížka $L_2(m)$. Spektrum tohoto grafu je $2(m-1)^1, (m-2)^{2m-2}, (-2)^{(m-1)^2}$. Mřížka grafu $L(m, n)$ je graf kartézského součinu $K_m \times K_n$ kompletních grafů, které jsou ekvivalentní k line grafu kompletního bipartitního grafu $K_{(m,n)}$. Příklady těchto grafů můžeme vidět na obrázku 30.

Tyto dvě skupiny grafů (kompletní a kompletní bipartitní grafy) spolu s jejich doplňky jsou příklady silně pravidelných (regulárních) grafů. Speciálně doplňkem trojúhelníkového grafu $T(5)$ je Petersenův graf na obrázku 31, jehož spektrem je $3^1, (-2)^4, 1^5$. Silně regulární graf je takový graf, ve kterém má každá dvojice sousedních vrcholů stejný počet společných sousedů λ a každá dvojice nesousedních vrcholů stejný počet společných sousedů μ . Kompletní graf K_n je silně regulární pro libovolné n . [4]



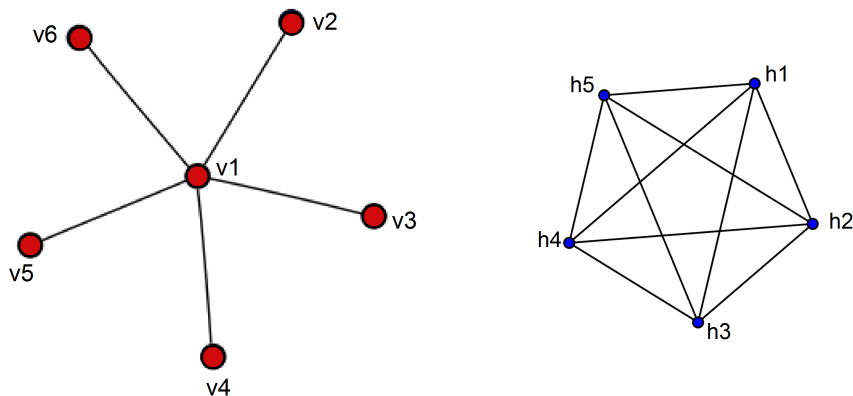
Obrázek 30: Příklady grafu mřížka



Obrázek 31: Petersenův graf

Příklad 2.1

Vezměme si graf S_6 , který je na obrázku 32 vlevo. Line grafem tohoto grafu je kompletní graf K_5 (na obrázku 32 vpravo), protože hvězda S_6 má pět hran, což jsou vrcholy příslušného line grafu. V hvězdě S_6 mají všechny hrany společný vrchol v_1 .



Obrázek 32: Hvězda S_6 a kompletní graf K_5 (neboli $(S_6)^l$)

$$A_{S_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_{S_6} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tabulka 6: Matice sousednosti a Laplaceova matice pro graf S_6

Spektrum matice sousednosti grafu S_6 je $-2.2361, 0^4, 2.2361$ a spektrum Laplaceovy matice je $0, 1^4, 6$.

Matici sousednosti line grafu $(S_6)^l$ získáme ze vztahu $N^T N - 2I$, jako je to psáno v [4] nebo zde v podkapitole 2.6 o line grafu.

$$A_{(S_6)^l} = N^T N - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

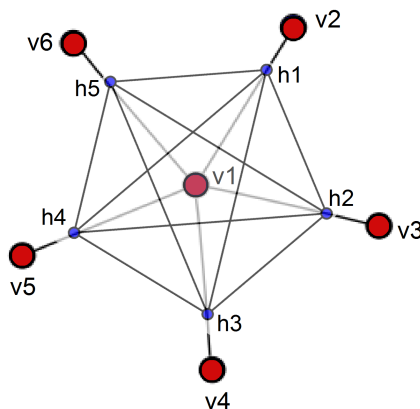
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{K_5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_{K_5} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Tabulka 7: Matice sousednosti a Laplaceova matice pro graf K_5

Spektrum matice sousednosti line grafu $(S_6)^l$ (tedy kompletního grafu K_5) je $-1^4, 4$. Spektrum Laplaceovy matice je $0, 5^4$.

Jak ve skutečnosti vypadá prolnutí obou grafů (jak původního S_6 , tak jeho line grafu) znázorňuje obrázek 33.



Obrázek 33: Graf S_6 spolu se svým line grafem $(S_6)^l \simeq K_5$

Není znám jednoduchý vztah mezi vlastními čísly grafu a jeho line grafu. Navíc i počet vrcholů grafu a line grafu se může výrazně lišit.

2.7 Doplněk grafu

Doplněk grafu \bar{G} nebo také G^c (písmeno c převzato z anglického complement) grafu G je graf se stejnou množinou vrcholů jako v grafu G , kde dva různé vrcholy jsou sousední právě tehdy, když spolu nesousedí v grafu G . Jestliže má graf G matici sousednosti A , pak \bar{G} má matici sousednosti $\bar{A} = J - I - A$. Pokud má graf G Laplaceovu matici L , pak \bar{G} má Laplaceovu matici $\bar{L} = nI - J - L$. [4]

Věta 2.10 [3] *Nechť G je graf na n vrcholech a \bar{G} je doplněk grafu G . Pak*

$$\lambda_1(G) \leq n$$

$$\lambda_i(\bar{G}) = n - \lambda_{n-i}(G) \quad \text{pro } i = 1, \dots, n-1.$$

Důkaz. [3] Mějme

$$L(G) + L(\overline{G}) = nI - J,$$

kde J je matice řádu n , která obsahuje samé jedničky a I je jednotková matice. Z toho vyplývá, že spektrum Laplaceovy matice doplňku grafu \overline{G} je

$$n - \lambda_{n-1}(G) \geq n - \lambda_{n-2}(G) \geq \dots \geq n - \lambda_1(G) \geq 0.$$

Proto tvrzení platí. \square

Na rozdíl třeba od line grafu je jasný vztah mezi vlastními čísly Laplaceovy matice grafu a jeho doplňku.

2.7.1 Samodoplňkový graf

Věta 2.11 [6] Grafy G a H nazýváme isomorfní, jestliže existuje zobrazení $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ takové, že každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ jsou sousední právě tehdy, když jsou sousední vrcholy $\varphi(u), \varphi(v) \in V(H)$. Píšeme $G \simeq H$. Zobrazení φ nazýváme isomorfismus.

Formálně můžeme zachování sousednosti vzorů a obrazů v isomorfismu $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ stručně zapsat jako

$$\forall u, v \in V(G) : uv \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H).$$

Věta 2.12 Graf G nazýváme samodoplňkový, jestliže je isomorfní se svým doplňkem \overline{G} .

Příkladem samodoplňkových grafů jsou cesta P_4 a cyklus C_5 . Pro cykly C_6 a C_7 toto tvrzení neplatí.

Příklad 2.2

Mějme cestu P_4 na obrázku 34 (vlevo), která je samodoplňková. Její doplněk je na obrázku 34 (vpravo).

Zde máme ukázán isomorfismus mezi cestou P_4 a jejím doplňkem $\overline{P_4}$:

$$\begin{aligned} \varphi V(P_4) &\rightarrow V(\overline{P_4}) \\ \varphi(v_1) &\rightarrow w_2 \\ \varphi(v_2) &\rightarrow w_4 \\ \varphi(v_3) &\rightarrow w_1 \\ \varphi(v_4) &\rightarrow w_3 \end{aligned}$$

$$A_{P_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_{P_4} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tabulka 8: Matice sousednosti a Laplaceova matice pro graf P_4

Spektrum matice sousednosti grafu P_4 je $-1.6180, -0.6180, 0.6180, 1.6180$. Spektrum Laplaceovy matice je $0, 0.5858, 2, 3.4142$.

Matici sousednosti grafu $\overline{P_4}$ získáme vztahem $\overline{A} = J - I - A$, a Laplaceovu matici téhož grafu jako $\overline{L} = nI - J - L$.

$$\overline{A} = J - I - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

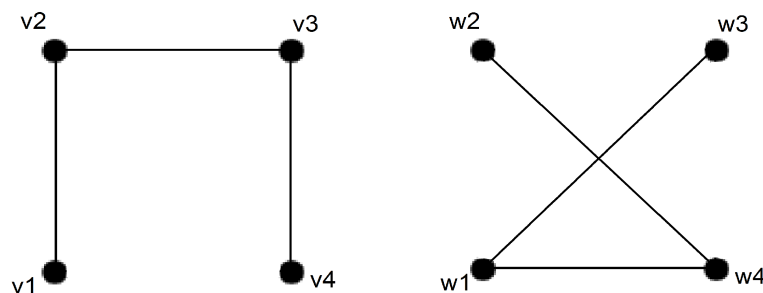
$$\overline{L} = nI - J - L = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}_{P_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{L}_{P_4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tabulka 9: Matice sousednosti a Laplaceova matice pro graf $\overline{P_4}$

Spektrum matice sousednosti grafu $\overline{P_4}$ je $-1.6180, -0.6180, 0.6180, 1.6180$. Je tedy stejné jako u grafu P_4 . Spektrum Laplaceovy matice je taktéž stejné jako u P_4 $0, 0.5858, 2, 3.4142$.



Obrázek 34: Cesta P_4 a její doplněk $\overline{P_4}$

Jak můžeme na tomto příkladu pěkně vidět, správně nám vyšla stejná vlastní čísla matic. Došlo k tomu právě proto, že cesta P_4 je samodoplňková, tedy isomorfní se svým doplňkem. Má-li graf hodně automorfismů, má potom i násobná vlastní čísla.

3 Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit ucelený přehled o spektru matice sousednosti a Laplaceovy matice vybraných tříd grafů, kterými jsou kompletní graf, kompletní bipartitní graf, cesta, cyklus, hvězda a hyperkrychle. O těchto třídách vypovídá první část textu. Smyslem této práce nebylo zkoumat vlastní vektory, ale zaměřili jsme se především na vlastní čísla grafů. Cílem také bylo vyslovit a prověřit některá pozorování.

Práce podává výklad také o kartézském součinu, na základě kterého můžeme určit spektrum některých grafů. Názorně to můžeme vidět v příkladu, na kterém jsme zjišťovali kartézský součin hyperkrychlí. Kartézským součinem ovšem nemusíme počítat pouze malé grafy, ale také mřížky velkých rozměrů.

Druhá část této práce se zabývá operacemi v grafu. Pokud v grafu provedeme operaci odebrání hrany či vrcholu, výsledkem je, že vlastní čísla se nám posunou blíže k nule. Zdá se, že pro grafy s velkým počtem hran je posun vlastních čísel výraznější než pro grafy s menším počtem hran (na stejném počtu vrcholů). Dále je zajímavé prozkoumat, zda grafy s velkým počtem automorfismů obecně mají násobná vlastní čísla nebo ne, což se v rámci této práce prověřit nepodařilo. Grafické znázornění pozorování posunu vlastních čísel jsme si ukázali na příkladu stromu, cyklu a kompletního grafu v kapitole 2. Na základě grafického znázornění můžeme tedy přibližně určit interval, ve kterém se budou pohybovat vlastní čísla, pokud bychom odebrali další hranu či vrchol. Konkrétní vlastní čísla nejsem schopni sdělit pouhým odhadem.

4 Literatura

- [1] Norman Biggs: Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, 1993, ISBN 0-521-45897-8
- [2] László Lovász: Eigenvalues of graphs, 2007
- [3] Xiao-Dong Zhang: The Laplacian eigenvalues of graphs: a survey, Shanghai Jiao Tong University, 2011
- [4] Andries E. Brouwer, Willem H. Haemers: Spectra of graphs
- [5] Frank J. Hall: The Adjacency Matrix, Standard Laplacian and Normalized Laplacian, and Some Eigenvalue Interlacing Results; Department of Mathematics and Statistics, Georgia State University, Atlanta, GA 30303
- [6] Petr Kovář: Teorie grafů, VŠB-TU Ostrava, 2012